Instituto de Computação
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

MC102 - Aula 19
Recursão
Algoritmos e Programação de Computadores

Turmas
OVXZ

Prof. Lise R. R. Navarrete
lrommel@ic.unicamp.br

Terça-feira, 31 de maio de 2022
21:00h - 23:00h (CB06)

Instituto de Computação
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

MC102 – Algoritmos e Programação de Computadores

Turmas
OVXZ

https://ic.unicamp.br/~mc102/

Site da Coordenação de MC102

Aulas teóricas:

Terça-feira, 21:00h - 23:00h (CB06)
Quinta-feira, 19:00h - 21:00h (CB06)

Conteúdo

Indução

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Indução é uma técnica de demonstração matemática em que algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar os itens 1 e 3, listados a seguir:
  1) *Caso Base: Provar que T é válida para $n = 1$.*
  2) *Hipótese de Indução: Assumimos que T é válida para $n - 1$.*
  3) *Passo de Indução: Assumindo que T é válida para $n - 1$, devemos provar que T é válida para n.*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \, ?$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n =$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cómo provamos que isto é verdade?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cómo provamos que isto é verdade?

Devemos verificar que a formula vale para todo $n \in \{1, 2, 3, \ldots, \}$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

é verdade para $n = 1$?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

é verdade para $n = 1$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

é verdade para $n = 1$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 1$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 1$?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

é verdade para $n = 1$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 1$?

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 1$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 1$?

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Então,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 1$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 1$?

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Então, (α) é verdade para $n = 1$.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

é verdade para $n = 2$?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 2$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 2$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 3$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 2$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 3$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 2$?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 2$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 3$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 2$?

$$\frac{2(2+1)}{2} = 3$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 2$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 3$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 2$?

$$\frac{2(2+1)}{2} = 3$$

Então,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 2$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 3$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 2$?

$$\frac{2(2+1)}{2} = 3$$

Então, (α) é verdade para $n = 2$.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 3$?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

é verdade para $n = 3$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

é verdade para $n = 3$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 6$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

é verdade para $n = 3$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 6$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 3$?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

é verdade para $n = 3$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 6$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 3$?

$$\frac{3(3+1)}{2} = 6$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 3$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 6$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 3$?

$$\frac{3(3+1)}{2} = 6$$

Então,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

é verdade para $n = 3$?

Quanto vale a soma?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 6$$

Quanto vale a formula aplicada em $n = 3$?

$$\frac{3(3+1)}{2} = 6$$

Então, (α) é verdade para $n = 3$.

Devemos continuar para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

O passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

O passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

ou seja

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x = \sum_{i=1}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2}$$ **é verdade!!**

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

O passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

ou seja

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x = \sum_{i=1}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2}$$ **é verdade!!**

A ideia é que a partir disso,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

O passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

ou seja

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x = \sum_{i=1}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2}$$ **é verdade!!**

A ideia é que a partir disso,
consigamos provar que a formula vale também para $n = x + 1$.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

ou seja

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x = \sum_{i=1}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2}$$ **é verdade!!**

A ideia é que a partir disso,
consigamos provar que a formula vale também para $n = x + 1$.

O que provamos com isso?

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

O passo de indução

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ x,\ x+1,\ \ldots$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ x,\ x+1,\ \ldots$$

ou seja

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x+1$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$\overset{\textbf{(v)}}{x}$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{x + 1}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow x \overset{\text{(v)}}{+} 1$$

Caso Base

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow x \overset{\text{(v)}}{+} 1$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$$\overset{(v)}{x} \Rightarrow x \overset{(v)}{+} 1$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

Então

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{(v)}{1}}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$$\overset{\textbf{(v)}}{x} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{x+1}$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

Então

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x+1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow x \overset{\text{(v)}}{+} 1$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

Então

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{3}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{x + 1}$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

Então

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{3} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{4}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x+1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{x+1}$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

Então

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{3} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{4} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{5}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow x \overset{\text{(v)}}{+} 1$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

Então

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{3} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{4} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{5} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{6}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x+1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{x+1}$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

Então

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{3} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{4} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{5} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{6} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{7}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{x+1}$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

Então

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{3} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{4} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{5} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{6} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{7} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{8}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

O passo de indução

(α) é verdade para $x \Rightarrow (\alpha)$ é verdade para $x + 1$

$$\overset{\text{(v)}}{x} \Rightarrow x \overset{\text{(v)}}{+} 1$$

Caso Base

(α) é verdade para 1

Então

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{3} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{4} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{5} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{6} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{7} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{8} \Rightarrow \ldots$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

Prova do passo de indução

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

Prova do passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

Prova do passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

ou seja
$$1 + 2 + 3 + \ldots + x \; = \; \frac{x(x+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

Prova do passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

ou seja
$$1 + 2 + 3 + \ldots + x = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) = \frac{x(x+1)}{2} + (x+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

Prova do passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

ou seja

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) = \frac{x(x+1)}{2} + (x+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{2(x+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

Prova do passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

ou seja

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + x &= \frac{x(x+1)}{2} \\
1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) &= \frac{x(x+1)}{2} + (x+1) \\
1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) &= \frac{x(x+1)}{2} + \frac{2(x+1)}{2} \\
1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) &= \frac{(x+2)(x+1)}{2}
\end{aligned}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \ldots(\alpha)$$

Prova do passo de indução

Vamos supor que formula vale para um valor $n = x$

ou seja

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + x &= \frac{x(x+1)}{2} \\
1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) &= \frac{x(x+1)}{2} + (x+1) \\
1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) &= \frac{x(x+1)}{2} + \frac{2(x+1)}{2} \\
1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) &= \frac{(x+2)(x+1)}{2} \\
1 + 2 + 3 + \ldots + x + (x+1) &= (\alpha) \text{ em } x+1
\end{aligned}$$

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Por que a indução funciona? Por que as duas condições são suficientes?
  - Mostramos que T é válida para um caso simples como $n = 1$.
  - Com o passo da indução, mostramos que T é válida para $n = 2$.
  - Como T é válida para $n = 2$, pelo passo de indução, T também é válida para $n = 3$ e assim por diante.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

Teorema

A soma $S(n)$ dos primeiros n números naturais é $S(n) = n(n+1)/2$.

Prova

- *Base: Para* $n = 1$, *temos que* $S(1) = n(n+1)/2 = 1(1+1)/2 = 1$.
- *Hipótese de Indução: Vamos assumir que a fórmula é válida para* $n-1$, *ou seja,* $S(n-1) = (n-1)n/2$.
- *Passo: Devemos mostrar que é válida para n. Por definição,* $S(n) = S(n-1) + n$. *Por hipótese,* $S(n-1) = (n-1)n/2$, *logo:*

$$
\begin{aligned}
S(n) &= S(n-1) + n \\
&= (n-1)n/2 + n \\
&= (n^2 - n)/2 + n \\
&= (n^2 + n)/2 \\
&= n(n+1)/2
\end{aligned}
$$

Recursão

Indução

(v)
1
Caso Base

Indução

$$\overset{\textbf{(v)}}{\underset{\text{Caso Base}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textcolor{red}{\textbf{(v)}}}{1}} \Rightarrow \overset{\textcolor{red}{\textbf{(v)}}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textcolor{red}{\textbf{(v)}}}{3}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{4}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6}$$

Indução

$$\overset{\textbf{(v)}}{\underset{\text{Caso Base}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7}$$

Indução

$$\overset{\textbf{(v)}}{\underset{\text{Caso Base}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{8}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\textbf{(v)}}{n}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{1}} \Rightarrow \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{1}} \Rightarrow \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\color{red}{\textbf{(v)}}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \;\color{red}{\leftarrow}\; \ldots 8$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\textbf{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\textbf{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \dots \overset{\textbf{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \dots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \dots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\text{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots \overset{\text{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\textbf{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots \overset{\text{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\text{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{n!}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\textbf{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{n!} \leftarrow n \times (n-1)!$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textcolor{red}{\text{(v)}}}{1}} \Rightarrow \overset{\textcolor{red}{\text{(v)}}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textcolor{red}{\text{(v)}}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textcolor{red}{\text{(v)}}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textcolor{red}{\text{(v)}}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textcolor{red}{\text{(v)}}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textcolor{red}{\text{(v)}}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textcolor{red}{\text{(v)}}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\textcolor{red}{\text{(v)}}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{n!} \leftarrow n \times (n-1)! \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2)!$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\textbf{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{n!} \leftarrow n \times (n-1)! \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2)! \leftarrow \ldots \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times \underset{\text{Caso base}}{1}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots \overset{\text{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{n!} \leftarrow n \times (n-1)! \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2)! \leftarrow \ldots \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times \underset{\text{Caso base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{5!}$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \overset{\text{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots \overset{\text{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Longrightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{n!} \leftarrow n \times (n-1)! \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2)! \leftarrow \ldots \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times \underset{\text{Caso base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{5!} \leftarrow 5 \times 4!$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\text{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{n!} \leftarrow n \times (n-1)! \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2)! \leftarrow \ldots \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times \underset{\text{Caso base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{5!} \leftarrow 5 \times 4! \leftarrow 5 \times 4 \times 3!$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\textbf{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\textbf{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\textbf{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\textbf{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{n!} \leftarrow n \times (n-1)! \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2)! \leftarrow \ \ldots \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times \underset{\text{Caso base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{5!} \leftarrow 5 \times 4! \leftarrow 5 \times 4 \times 3! \leftarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2!$$

Indução

$$\underset{\text{Caso Base}}{\overset{\text{(v)}}{1}} \Rightarrow \overset{\text{(v)}}{2} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{3} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{4} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{5} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{6} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{7} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \overset{\text{(v)}}{8} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\text{(v)}}{n} \overset{\text{Passo}}{\Rightarrow} \ldots$$

Recursão

$$\underset{\text{Problema de tamanho}}{n} \leftarrow \ldots 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 2 \leftarrow \underset{\text{Caso Base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{n!} \leftarrow n \times (n-1)! \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2)! \leftarrow \ldots \leftarrow n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times \underset{\text{Caso base}}{1}$$

$$\underset{\text{Problema}}{5!} \leftarrow 5 \times 4! \leftarrow 5 \times 4 \times 3! \leftarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2! \leftarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \underset{\text{Caso base}}{1}$$

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Suponha que desejamos criar um algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Primeiramente, definimos a solução para casos base.
  - Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando soluções para instâncias (entradas) menores do problema.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Definições recursivas de funções operam como o princípio matemático da indução visto anteriormente, ou seja, a solução é inicialmente definida para o(s) caso(s) base e estendida para o caso geral.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Problema: calcular o fatorial de um número inteiro não negativo (n).
- Qual é o caso base?
  - $0! = 1$
- Qual é o passo indutivo?
  - $n! = n \times (n-1)!$
- Este problema é trivial pois a própria definição de fatorial é recursiva.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Portanto, a solução do problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Se $n = 0$ então $0! = 1$.
  - Se $n \geq 1$ então $n! = n \times (n-1)!$.
- Note como aplicamos o princípio da indução:
  - Sabemos a solução para um caso base ($n = 0$).
  - Definimos a solução do problema geral em termos do mesmo problema, mas para um caso mais simples.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

```python
def fatorial(n):
  if n == 0:
    return 1
  else:
    aux = fatorial(n - 1)
    return n * aux
```

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Para solucionar o problema, fizemos uma chamada para a própria função, por isso esta função é chamada de recursiva.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

Gerenciamento de Memória

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Devemos entender como é feito o controle sobre as variáveis locais em chamadas recursivas.
- A memória de um sistema computacional é dividida em três partes:
  - *Espaço Estático*: contém o código do programa.
  - *Heap:* para alocação dinâmica de memória.
  - *Pilha:* para execução de funções.

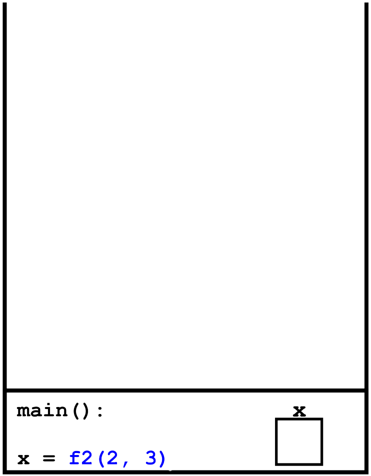
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Toda vez que uma função é invocada, suas variáveis locais são armazenadas no topo da pilha.
- Quando uma função termina a sua execução, suas variáveis locais são removidas da pilha.

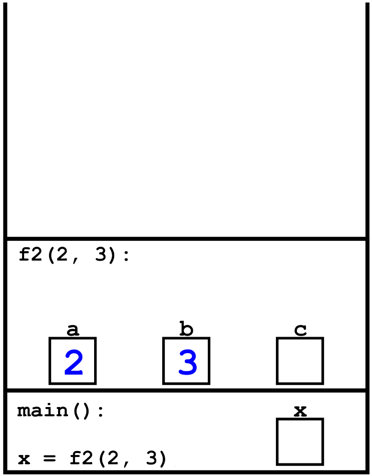
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

```python
def f1(a, b):
  c = a - b
  return (a + b + c)

def f2(a, b):
  c = f1(b, a)
  return (b + c - a)

def main():
  x = f2(2, 3)
  return 0

main()
```

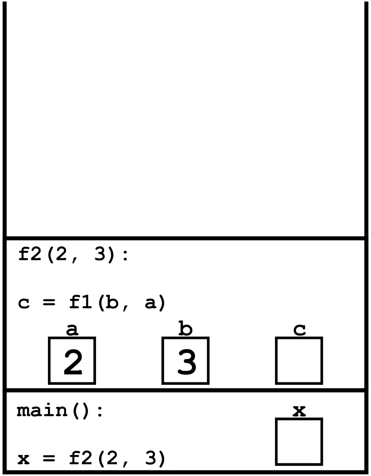
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



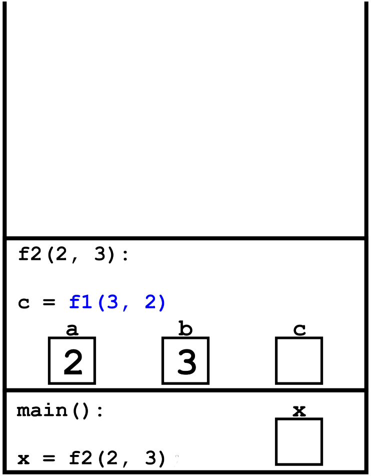
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



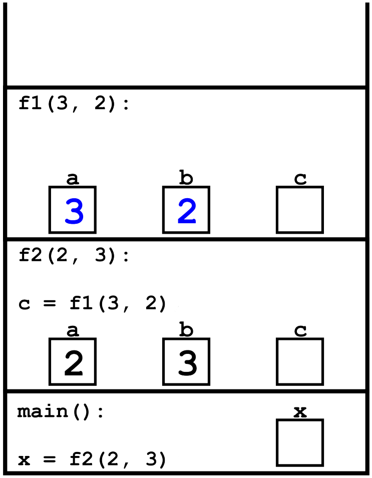
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



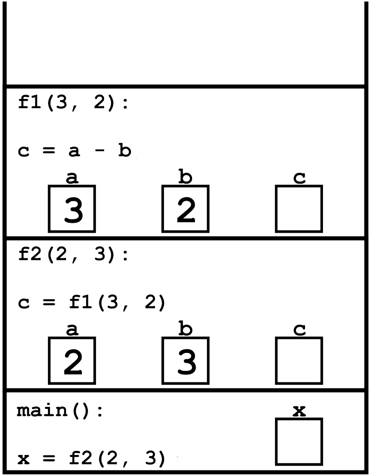
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



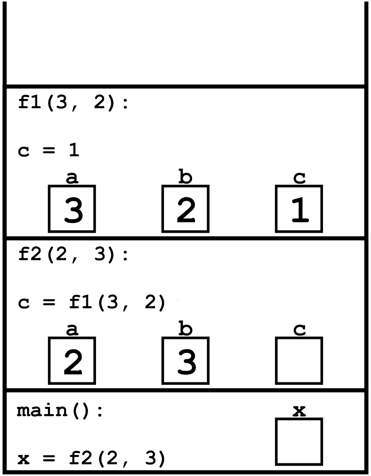
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



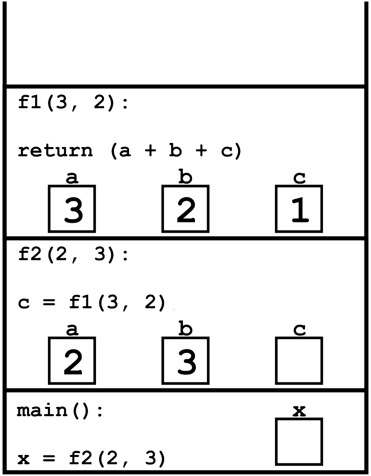
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



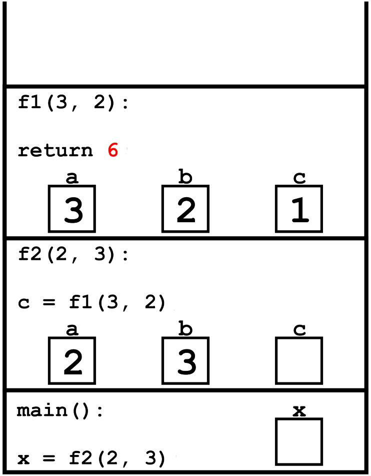
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



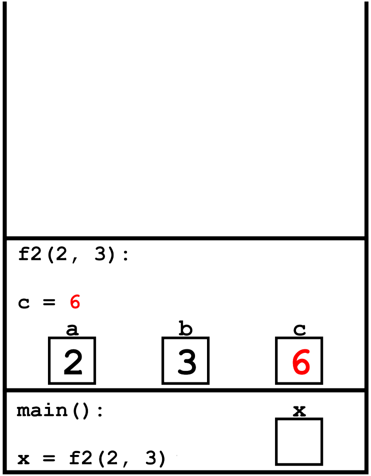
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



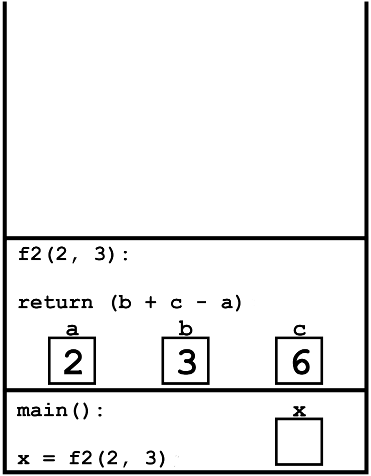
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



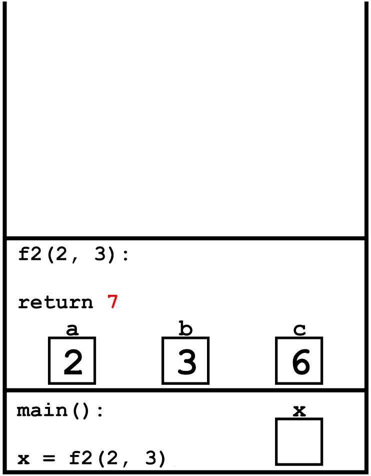
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



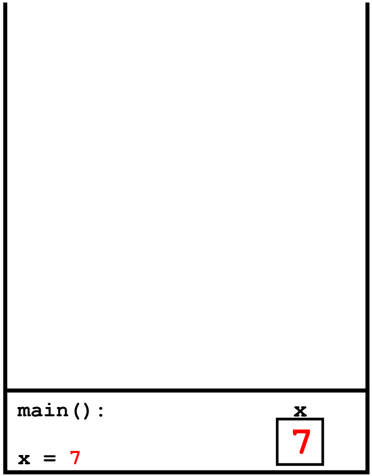
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



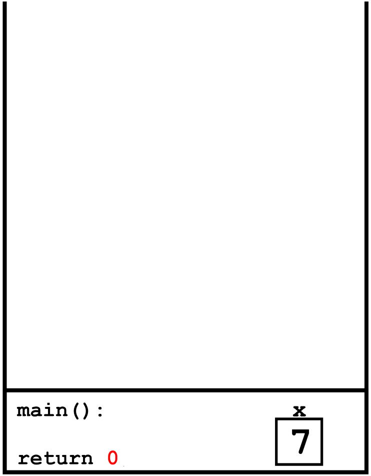
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



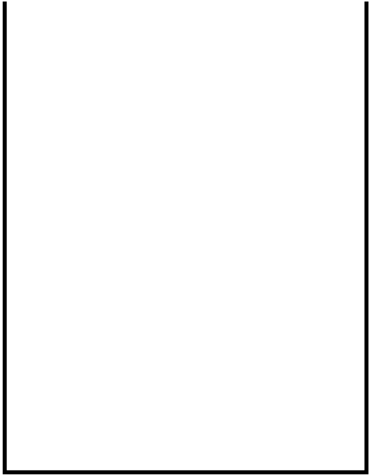
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- No caso de chamadas recursivas é como se cada chamada correspondesse à chamada de uma função distinta.
- As execuções das chamadas de funções recursivas são feitas na pilha, assim como qualquer função.
- O último conjunto de variáveis alocadas na pilha, que está no topo, corresponde às variáveis da última chamada da função.
- Quando termina a execução de uma chamada da função, as variáveis locais desta chamada são removidas da pilha.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

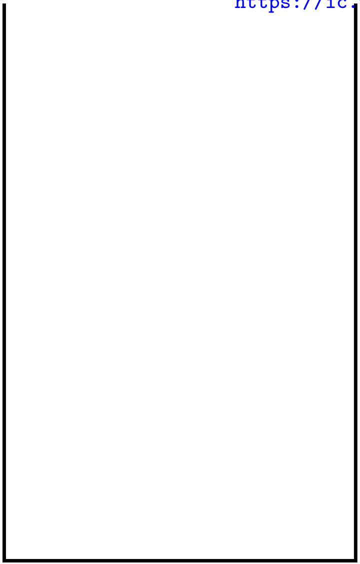
- Considere novamente a solução recursiva para se calcular o fatorial e assuma que seja feita a chamada `fatorial(4)`.

```python
def fatorial(n):
  if n == 0:
    return 1
  else:
    aux = fatorial(n - 1)
    return n * aux
```

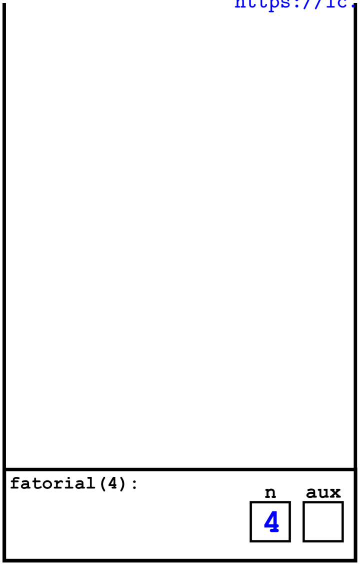
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Cada chamada da função `fatorial` cria novas variáveis locais de mesmo nome (`n` e `aux`).
- Portanto, múltiplas variáveis (`n` e `aux`) podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome `n` (ou `aux`) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.
- A seguir, veremos o estado da pilha de execução para a chamada `fatorial(4)`.

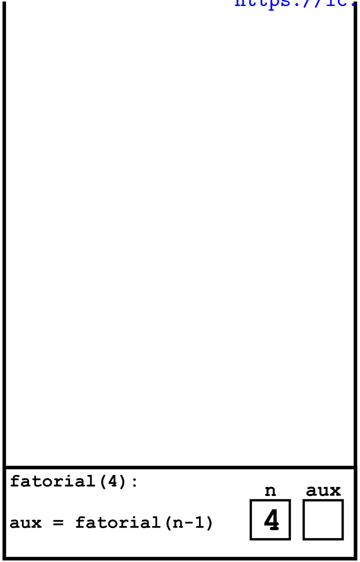
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



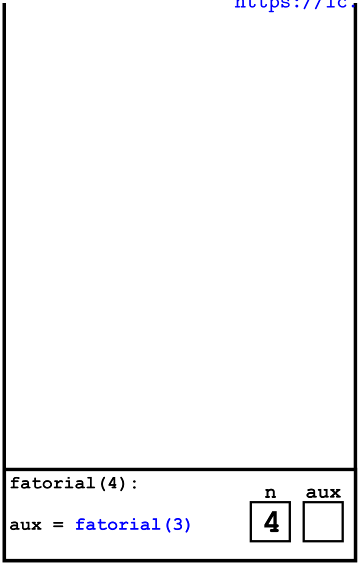
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



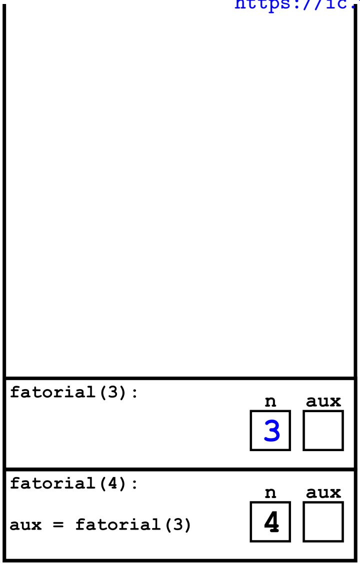
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



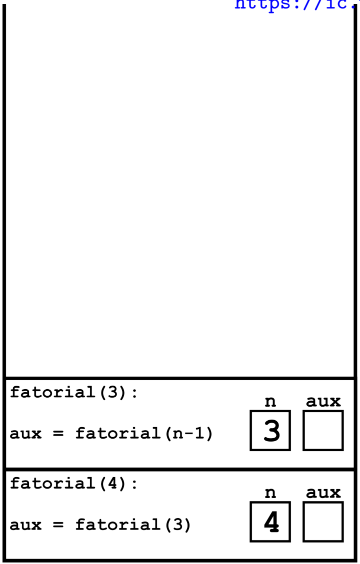
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



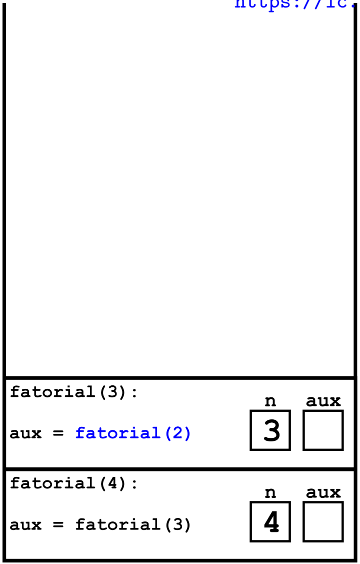
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



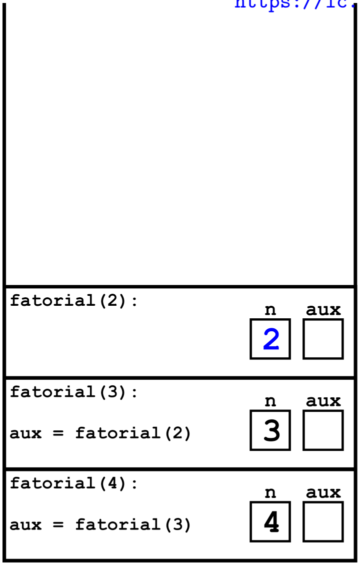
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



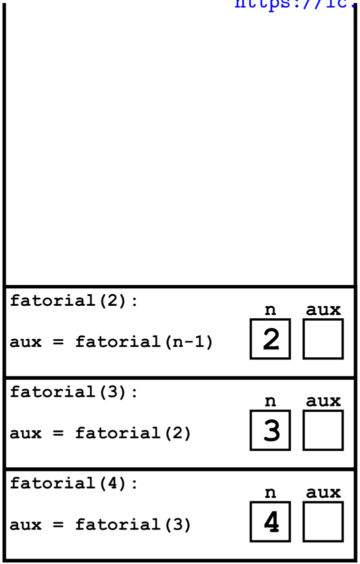
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



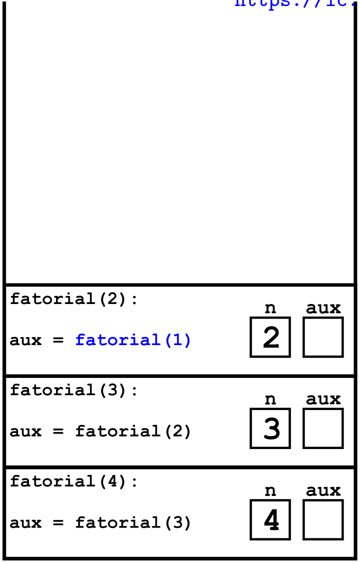
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



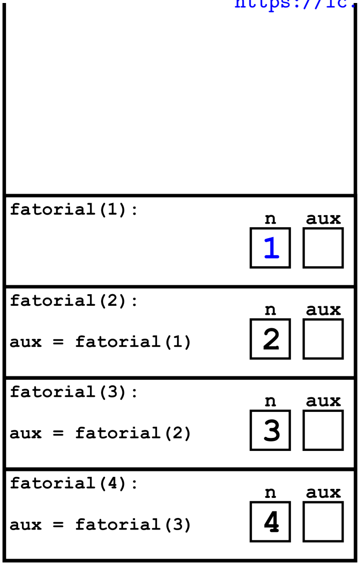
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



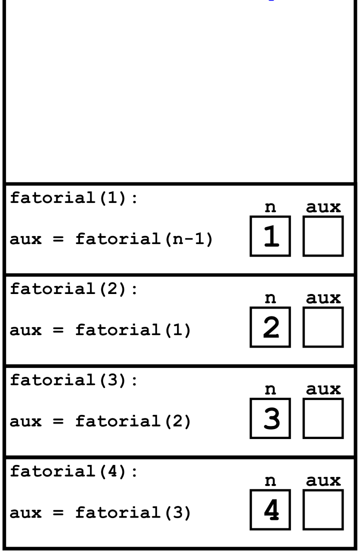
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



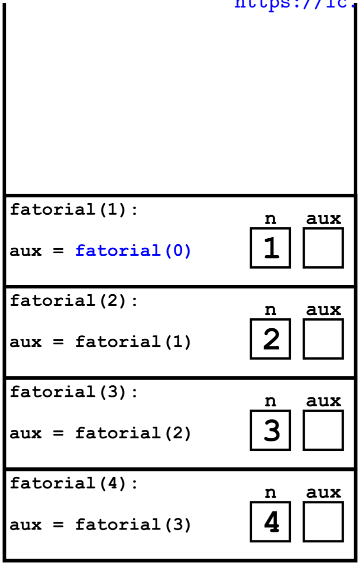
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



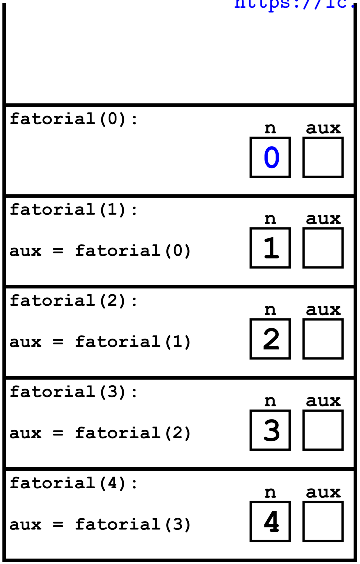
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



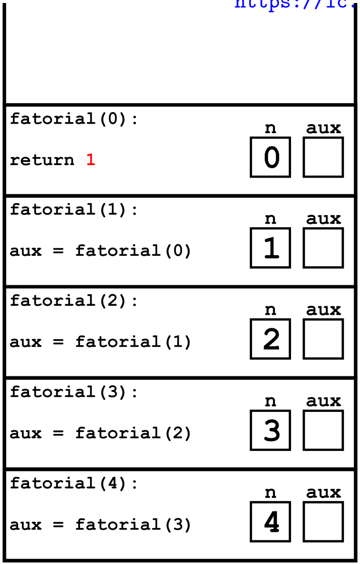
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



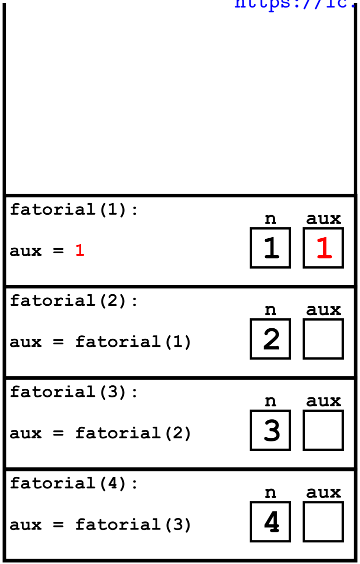
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



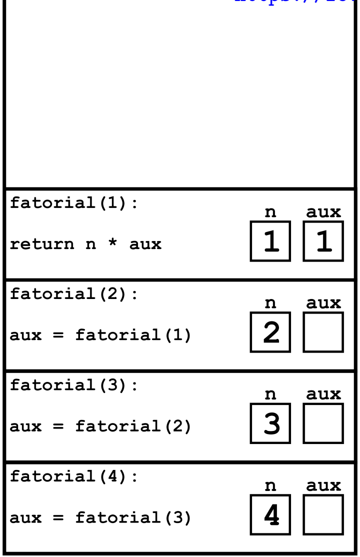
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

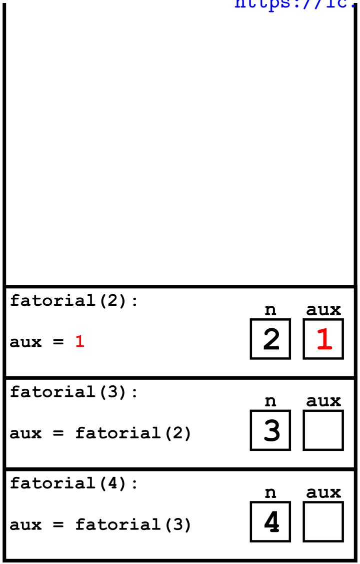
fatorial(1):
return 1
n: 1 | aux: 1

fatorial(2):
aux = fatorial(1)
n: 2 | aux:

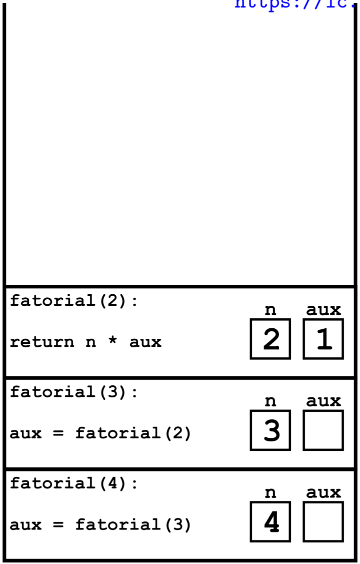
fatorial(3):
aux = fatorial(2)
n: 3 | aux:

fatorial(4):
aux = fatorial(3)
n: 4 | aux:

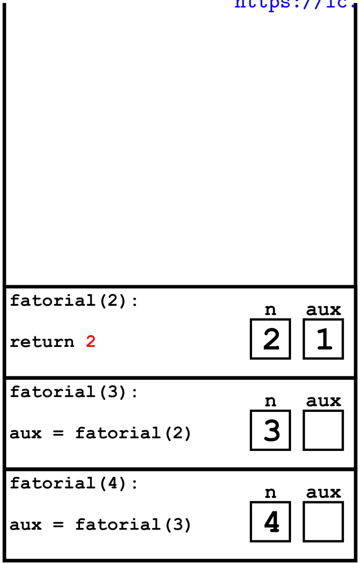
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



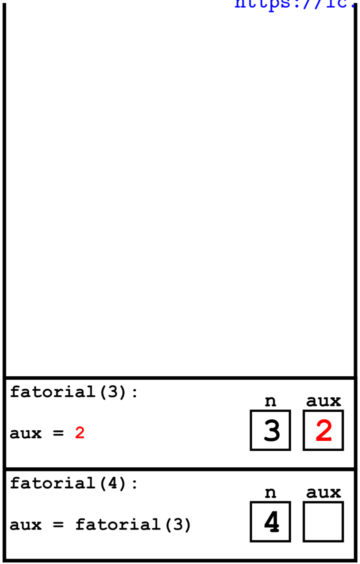
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



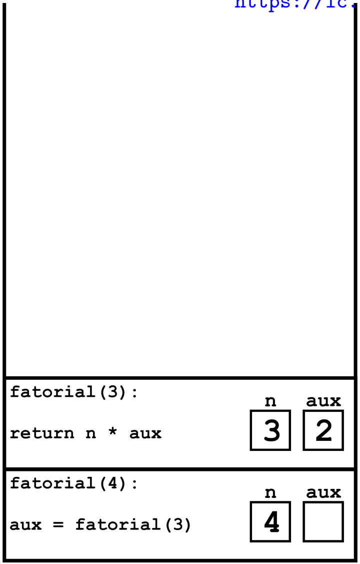
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



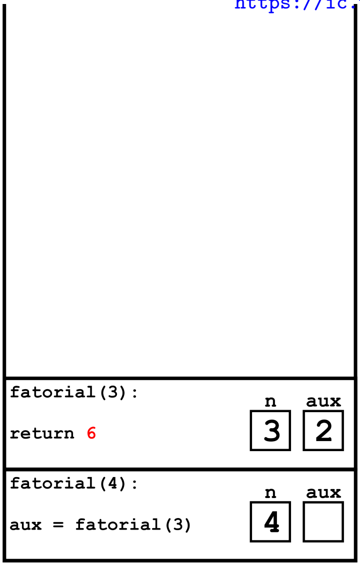
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



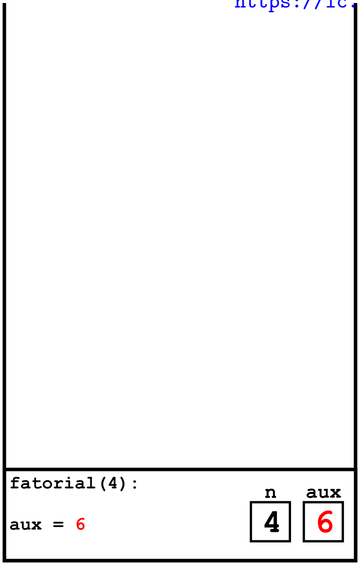
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



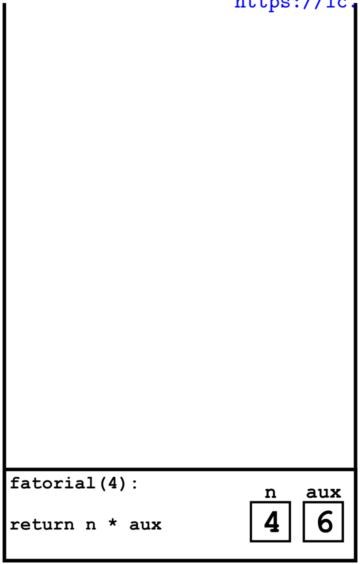
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



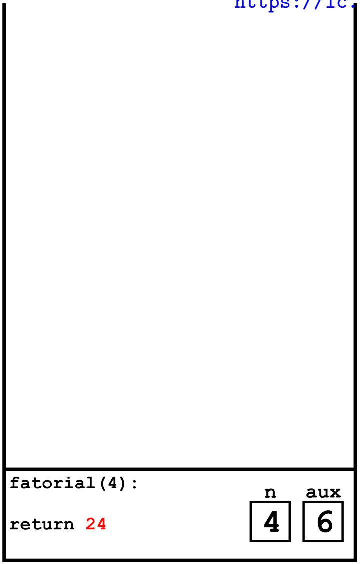
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



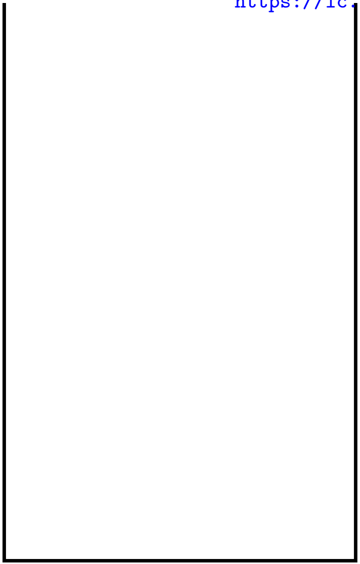
https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf



https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Note que a variável `aux` é desnecessária. Além disso, o `else` também é desnecessário.

```
def fatorial(n):
  if n == 0:
    return 1
  else:
    return n * fatorial(n - 1)

```

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Note que a variável `aux` é desnecessária. Além disso, o `else` também é desnecessário.

```python
def fatorial(n):
  if n == 0:
    return 1

  return n * fatorial(n - 1)

```

Recursão $\times$ Iteração

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas do que as iterativas.
- Soluções iterativas em geral consomem menos memória do que as soluções recursivas.
- A cópia dos parâmetros a cada chamada recursiva gera um custo adicional para as soluções recursivas.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- No caso da função `fatorial`, a solução iterativa é mais eficiente:

```
def fatorial(n):
  fat = 1
  for i in range(1, n + 1):
    fat = fat * i
  return fat
```

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Seja `l` uma lista de inteiros de tamanho `n`.
- Queremos saber a soma de todos os seus elementos.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva?
- Vamos denotar por `soma(l, n)` a soma dos `n` primeiros elementos de uma lista `l`. Com isso, temos:
  - Se `n = 0`, `soma(l, 0) = 0`.
  - Se `n > 0`, `soma(l, n) = soma(l, n - 1) + l[n - 1]`.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

```
def soma(l, n):
  if n == 0:
    return 0

  return soma(l, n - 1) + l[n - 1]
```

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- O método recursivo sempre termina, pois:
  - Existe um caso base bem definido.
  - A cada chamada recursiva, usamos um valor menor de n.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Neste caso, a solução iterativa também é melhor que a recursiva:

```
def soma(l, n):
  soma = 0

  for i in range(n):
    soma = soma + l[i]

  return soma
```

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Neste caso, a solução iterativa também é melhor que a recursiva:

```python
def soma(l, n):
  soma = 0

  for i in l:
    soma = soma + i

  return soma
```

Números de Fibonacci

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- A série de Fibonacci é a seguinte:
  - $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$.
- Suponha que queremos determinar qual é o `n`-ésimo número da série de Fibonacci, que denotaremos por `Fibonacci(n)`.
- Como descrever o `n`-ésimo número de Fibonacci de forma recursiva?

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Temos os seguintes casos base:
  - Se `n = 1` ou `n = 2`, então `Fibonacci(n) = 1`.
- Caso contrário, podemos computar `Fibonacci(n)` como:
  - `Fibonacci(n) = Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2)`

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

```python
def fibonacci(n):
  if n == 1 or n == 2:
    return 1

  return fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2)
```

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

```python
def fibonacci(n):
  fib = [1, 1]

  for i in range(2, n):
    fib.append(fib[i - 1] + fib[i - 2])

  return fib[n - 1]
```

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

```python
def fibonacci(n):
  anterior = atual = 1

  for i in range(2, n):
    (anterior, atual) = (atual, atual + anterior)

  return atual
```

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Para `n > 2`, quantas somas são necessárias para calcular `Fibonacci(n)` usando uma estratégia iterativa?
  - São necessárias `n - 2` somas.
- Para `n > 2`, quantas somas são realizadas para calcular `Fibonacci(n)` usando a função recursiva vista anteriormente?
  - `Fibonacci(3)`: 1 soma.
  - `Fibonacci(4)`: 2 somas.
  - `Fibonacci(5)`: 4 somas.
  - `Fibonacci(6)`: 7 somas.
  - `Fibonacci(7)`: 12 somas.
  - `Fibonacci(8)`: 20 somas.
  - `Fibonacci(9)`: 33 somas.
  - `Fibonacci(10)`: 54 somas.
  - `Fibonacci(20)`: 6.764 somas.
  - `Fibonacci(50)`: 12.586.269.024 somas.
  - São realizadas `Fibonacci(n) - 1` somas.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Por exemplo, para `n = 20`, os números de vezes que a função recursiva calcula `Fibonacci(k)`, para $1 \leq k \leq 20$, são os seguintes:

`Fibonacci(1)`: 2584	`Fibonacci(11)`: 55
`Fibonacci(2)`: 4181	`Fibonacci(12)`: 34
`Fibonacci(3)`: 2584	`Fibonacci(13)`: 21
`Fibonacci(4)`: 1597	`Fibonacci(14)`: 13
`Fibonacci(5)`: 987	`Fibonacci(15)`: 8
`Fibonacci(6)`: 610	`Fibonacci(16)`: 5
`Fibonacci(7)`: 377	`Fibonacci(17)`: 3
`Fibonacci(8)`: 233	`Fibonacci(18)`: 2
`Fibonacci(9)`: 144	`Fibonacci(19)`: 1
`Fibonacci(10)`: 89	`Fibonacci(20)`: 1

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- A versão iterativa calcula uma única vez todos os valores de `Fibonacci(k)`, para $1 \leq \mathtt{k} \leq \mathtt{n}$.
- Para calcular o valor de `Fibonacci(n)`, a função recursiva calcula o valor de `Fibonacci(k)`, para $2 \leq k \leq n$, `Fibonacci(n - k + 1)` vezes.

https://ic.unicamp.br/~mc102/aulas/aula12.pdf

- Recursão é uma técnica para se criar algoritmos em que:
  - Devemos descrever soluções para casos base.
  - Assumindo a existência de soluções para casos mais simples, mostramos como obter uma solução para um caso mais complexo.
- Algoritmos recursivos geralmente são mais claros e concisos.
- Devemos avaliar a clareza de código $\times$ eficiência do algoritmo.

Perguntas ....

Referências

- Zanoni Dias, MC102, Algoritmos e Programação de Computadores, IC/UNICAMP, 2021. https://ic.unicamp.br/~mc102/

  Aula Introdutória [slides] [vídeo]
  Primeira Aula de Laboratório [slides] [vídeo]
  Python Básico: Tipos, Variáveis, Operadores, Entrada e Saída [slides] [vídeo]
  Comandos Condicionais [slides] [vídeo]
  Comandos de Repetição [slides] [vídeo]
  Listas e Tuplas [slides] [vídeo]
  Strings [slides] [vídeo]
  Dicionários [slides] [vídeo]
  Funções [slides] [vídeo]
  Objetos Multidimensionais [slides] [vídeo]
  Algoritmos de Ordenação [slides] [vídeo]
  Algoritmos de Busca [slides] [vídeo]
  Recursão [slides] [vídeo]
  Algoritmos de Ordenação Recursivos [slides] [vídeo]
  Arquivos [slides] [vídeo]
  Expressões Regulares [slides] [vídeo]
  Execução de Testes no Google Cloud Shell [slides] [vídeo]
  Numpy [slides] [vídeo]
  Pandas [slides] [vídeo]

- Panda - Cursos de Computação em Python (IME -USP) https://panda.ime.usp.br/

  Como Pensar Como um Cientista da Computação https://panda.ime.usp.br/pensepy/static/pensepy/
  Aulas de Introdução à Computação em Python https://panda.ime.usp.br/aulasPython/static/aulasPython/

- Fabio Kon, Introdução à Ciência da Computação com Python http://bit.ly/FabioKon/
- Socratica, Python Programming Tutorials http://bit.ly/SocraticaPython/
- Google - online editor for cloud-native applications (Python programming) https://shell.cloud.google.com/
- w3schools - Python Tutorial https://www.w3schools.com/python/
- Outros, citados nos Slides.